



TITLE:

# 代数群の2つのinvolutionに関する 両側剰余類分類II(等質空間上の非 可換解析学)

AUTHOR(S):

松木, 敏彦

---

CITATION:

松木, 敏彦. 代数群の2つのinvolutionに関する両側剰余類分類II(等質空間上の非可換解析学). 数理解析研究所講究録 1995, 895: 98-113

ISSUE DATE:

1995-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/84447>

RIGHT:

## 代数群の 2 つの involution に関する両側剰余類分解 II

京大・総合人間学部 松木敏彦 (Toshihiko MATSUKI)

### 1 Introduction

$G$  を reductive なリー群、 $\sigma, \tau$  を  $G$  上の 2 つの involution ( $\sigma^2 = \tau^2 = id.$ ) とし、 $H, L$  を、

$$(G^\sigma)_0 \subset H \subset G^\sigma, \quad (G^\tau)_0 \subset L \subset G^\tau$$

を満たす  $G$  の部分群とする。ただし、 $G^\sigma, G^\tau$  はそれぞれ  $\sigma, \tau$  に関する  $G$  の固定部分群、 $(G^\sigma)_0, (G^\tau)_0$  はそれらの単位元を含む連結成分とする。

[8],[7]) ではいくつかの典型的な例 ( $G$  は代数群、 $H = G^\sigma, L = G^\tau$ ) について両側剰余類分解

$$H \backslash G / L$$

の標準的的代表元を与えた。そこで用いられた方法はすべて代数的であるので、基本的な例  $GL(p, \mathbb{F}) \times GL(n-p, \mathbb{F}) \backslash GL(n, \mathbb{F}) / GL(r, \mathbb{F}) \times GL(n-r, \mathbb{F})$  については任意の体  $\mathbb{F}$  (非可換でもよい) について記述した。他の (2 次形式に係る) 例については、筆者の興味と能力によって  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$  の場合に限定したが、もっと一般に記述できると思われる。

本稿では、まず  $G$  が compact のときに、そして次に noncompact のときに、両側剰余類分解  $H \backslash G / L$  の構造の一般論についていくつかの例と共に述べる ([9])。

関連する研究としては、次のようなものがある。

(1)  $G$  が compact のときに、構造定理と Intertwining function (球関数の一般化) について [3]、compact 対称空間上の Radon 変換について [4]。

(2)  $G$  が noncompact のときに、等質空間上の調和解析について [5]、 $G_{\mathbb{R}} \backslash G_{\mathbb{C}} / H_{\mathbb{C}}$  の複素解析的性質について [2]、 $H \backslash G / H$  の不変固有超関数について [1],[11] など、対称対の中零共役類について [6],[10],[12] など。

(3)  $G$  が有限体、局所体などの上の代数群のとき、川中、宇沢などによる研究がある。

### 2 Compact case

$G$  は compact とする。

$$\sigma\tau = \tau\sigma$$

のとき、 $H \backslash G / L$  の構造は、[3] で研究されている。

例 1  $(G, H, L) = (O(2m), O(r) \times O(s), U(m))$  ( $2m = r + s$ ,  $s : \text{odd}$ ,  $s < m$ )

$$\sigma g = I_{r,s} g I_{r,s}, \quad \tau g = J_m g J_m^{-1}, \quad H = G^\sigma, \quad L = G^\tau$$

$$I_{r,s} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_s \end{pmatrix}, \quad J_m = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}$$

のとき、 $\tau$  のどんな共役  $\tau_x = \text{Ad}(x)\tau\text{Ad}(x)^{-1}$  を取っても、

$$\sigma_x \tau \neq \tau \sigma_x$$

である。

証明  $L_x = G^{\tau_x}$  とおく。  $\sigma\tau_x = \tau_x\sigma$  と仮定すると、  $\tau_x H = H$ ,  $\sigma L_x = L_x$  であるから、

$$H/H \cap L_x, \quad L_x/H \cap L_x$$

は共に対称空間である。ところが、  $H = O(r) \times O(s)$ ,  $L_x \cong U(m)$  に対して、そのような  $H \cap L_x$  は存在しない。(compact 対称空間の分類による。)  $\square$

$(G, H, L) = (U(2m), U(r) \times U(s), Sp(m))$  のときも同様である。

$\mathfrak{g}$  を  $G$  のリー環とし、

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^\sigma \oplus \mathfrak{g}^{-\sigma} = \mathfrak{g}^\tau \oplus \mathfrak{g}^{-\tau}$$

を  $\sigma, \tau$  に関する  $+1, -1$  固有空間分解とする。 $\alpha$  を  $\mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\tau}$  の 1 つの極大可換部分空間とし、

$$A = \exp \alpha$$

とおく。 $\mathfrak{g}_s = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ,  $\mathfrak{z}$  は  $\mathfrak{g}$  の center とすると、

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_s \oplus \mathfrak{z}$$

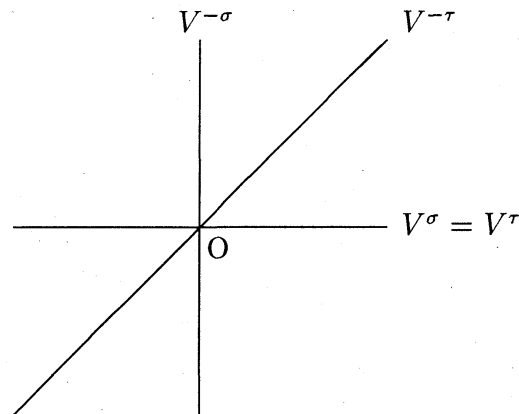
定理 1  $G = H G_0 L$  で、  $\sigma\tau|_{\mathfrak{z}}$  が semisimple のとき、

$$G = H A L$$

Lemma 1  $\sigma, \tau$  は実ベクトル空間  $V$  の involution とする。 $\sigma\tau$  が semisimple のとき、

$$V = (V^\sigma + V^\tau) \oplus (V^{-\sigma} \cap V^{-\tau}) \quad (2.1)$$

例 2  $V = \mathbb{R}^2$  とし、  $V^\sigma, V^{-\sigma}, V^\tau, V^{-\tau}$  が次の図のようになるように  $\sigma, \tau$  を定義すると、(2.1) は成り立たない。 $(\sigma\tau \text{ は semisimple でない。})$



定理 1 の証明  $x \in G^{\sigma\tau}$  のとき、

$$\sigma\tau(\sigma x) = \sigma(\tau\sigma)x = \sigma(\sigma\tau)^{-1}x = \sigma x$$

であるから、 $\sigma x \in G^{\sigma\tau}$  である。よって、 $\sigma G^{\sigma\tau} = G^{\sigma\tau}$  となり、 $(G^{\sigma\tau}, G^{\sigma} \cap G^{\tau})$  は対称対である。 $A \subset \exp(\mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\tau})$  はこの対称対の maximal torus であるから、compact である。よって、

$HAL$  は compact。

仮定により、 $HAL$  は  $G$  のすべての連結成分と交わるから、

$HAL$  は open in  $G$

を示せばよい。

ある  $N$  があって  $(\sigma\tau)^N|_{\mathfrak{g}_s} \in \text{Int}(\mathfrak{g}_s)$  であるから、 $\sigma\tau|_{\mathfrak{g}_s}$  は semisimple である。よって、

$\sigma\tau$  は semisimple。

Lemma 1 により、

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}^{\sigma} + \mathfrak{g}^{\tau}) \oplus (\mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\tau}) \quad (2.2)$$

である。 $(G^{\sigma\tau}, H \cap L)$  は compact 対称対だから、

$$\mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\tau} = \text{Ad}(H \cap L)\mathfrak{a}$$

$$\therefore HAL = H \exp(\text{Ad}(H \cap L)\mathfrak{a})L = H \exp(\mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\tau})L \quad (2.3)$$

(2.2), (2.3) により、 $HAL$  は単位元  $e$  の近傍を含む。

$H$  による左移動と  $L$  による右移動を考慮すれば、任意の  $a \in A$  に対して  $HAL$  が  $a$  の近傍を含むことさえ示せばよい。よって、

$$HALa^{-1} = HA(aLa^{-1})$$

が  $e$  の近傍を含むことを示せばよい。  $L_a = aLa^{-1}$ ,  $\tau_a = \text{Ad}(a)\tau\text{Ad}(a)^{-1}$  とおこう。このとき、

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \text{Ad}(a)\mathfrak{g}^{-\tau} = \mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\tau_a}$$

であり、さらに

$$\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{a}' \subset \mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\tau_a}$$

となる可換な  $\mathfrak{a}'$  が存在すると仮定すると、同じ議論により、

$$\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \text{Ad}(a)^{-1}\mathfrak{g}^{-\tau_a} = \mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\tau}$$

となり、 $\mathfrak{a}$  の仮定に反する。よって、 $\mathfrak{a}$  が  $\mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\tau_a}$  の極大可換部分空間であることが示された。従って  $H$ - $L_a$  double coset  $HAL_a$  が  $e$  の近傍を含むことがわかる。  $\square$

注意  $x \in G$  に対し、 $L_x = xLx^{-1}$  とおく。写像

$$HgL \mapsto HgLx^{-1} = Hgx^{-1}L_x$$

により、2つの両側剰余類分解  $H \backslash G / L$  と  $H \backslash G / L_x$  は自然に同一視できる。

Weyl 群の一般化 (c.f. [3], Chapter 8)

$$\begin{aligned} N_A &= \{(h, \ell) \in H \times L \mid hA\ell^{-1} = A\} \\ Z_A &= \{(h, \ell) \in H \times L \mid h a \ell^{-1} = a \text{ for all } a \in A\} \\ J &= N_A / Z_A \end{aligned}$$

とおく。

注意  $(h, \ell) \in N_A$  のとき、

$$h\ell^{-1} = h\ell^{-1} \in A$$

$$\therefore hAh^{-1} = hA\ell^{-1}(h\ell^{-1})^{-1} = A$$

よって、

$$J \cong \{(\text{Ad}(h)|_{\mathfrak{a}}, h\ell^{-1}) \mid h \in N_H(A), \ell \in L, h\ell^{-1} \in A\}$$

例 3  $H = L$  のとき、

$$J \cong W_H(A) \ltimes (A \cap H)$$

である。さらに、 $H = G^\sigma$  ならば

$$A \cap H = \{a \in A \mid a^2 = e\}$$

であることに注意しよう。

命題 1  $W_H(A) = W_{H \cap L}(A)$  のとき、

$$J \cong W_H(A) \bowtie J_0$$

ただし  $J_0 = Z_H(A)Z_L(A) \cap A$

定理 2  $G = HAL$  のとき、  $J \backslash A \cong H \backslash G/L$

証明  $a, b \in A$ ,

$$b = h a \ell^{-1} \quad \text{for some } h \in H, \ell \in L$$

のとき、

$$b = h' a \ell'^{-1}$$

となる  $(h', \ell') \in N_A$  が存在することを示せばよい。

$$A' = h A \ell^{-1} \text{ とおくと、 } A' \ni b,$$

$$\begin{aligned} A' b^{-1} &= h A \ell^{-1} b^{-1} = h A a^{-1} h^{-1} = h A h^{-1} \\ &= b \ell a^{-1} A \ell^{-1} b^{-1} = b \ell A (b \ell)^{-1} \end{aligned}$$

である。よって、 $\mathfrak{a}' = \text{Ad}(h)\mathfrak{a} = \text{Ad}(b\ell)\mathfrak{a}$  が定義できて、

$$\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \text{Ad}(b)\mathfrak{g}^{-\tau}$$

が成り立つ。一方、

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \text{Ad}(b)\mathfrak{g}^{-\tau}$$

も成り立つので、 $(G^{\sigma\tau}, H \cap b L b^{-1})$  が compact 対称対であることにより、

$$\text{Ad}(x)\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$$

を満たす  $x \in H \cap b L b^{-1}$  が存在する。 $h' = x h \in H$ ,  $\ell' = b^{-1} x b \ell \in L$  とおけば、

$$\begin{aligned} h' A \ell'^{-1} &= x h A \ell^{-1} b^{-1} x^{-1} b = x A' b^{-1} x^{-1} b = A \\ h' a \ell'^{-1} &= x h a \ell^{-1} b^{-1} x^{-1} b = x b b^{-1} x^{-1} b = b \end{aligned} \quad \square$$

root 系  $\alpha \in i\mathfrak{a}^*$  に対し、

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [Y, X] = \alpha(Y)X \text{ for all } Y \in \mathfrak{a}\}$$

$$\Sigma = \Sigma(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}) = \{\alpha \in i\mathfrak{a}^* - \{0\} \mid \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha) \neq \{0\}\}$$

とおくと、root space 分解

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma \cup \{0\}} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\alpha, \alpha)$$

が成り立つ。ここで、 $\alpha \in \mathfrak{g}^{\sigma\tau}$  に注意すれば、さらに

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\alpha, \alpha) &= \bigoplus_{|\lambda|=1} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\alpha, \alpha, \lambda) \\ \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\alpha, \alpha, \lambda) &= \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\alpha, \alpha) \mid \sigma\tau X = \lambda X\} \end{aligned}$$

と固有空間分解できる。

命題 2  $\Sigma$  は root 系の公理を満たす。

例 4  $(G, H, L) = (U(n, \mathbb{F}), U(p, \mathbb{F}) \times U(q, \mathbb{F}), U(r, \mathbb{F}) \times U(s, \mathbb{F}))$  ( $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ )

$$n = p + q = r + s, \quad r \geq p \geq q \geq s$$

とし、

$$\sigma g = I_{p,q} g I_{p,q}, \quad \tau g = I_{r,s} g I_{r,s}, \quad H = G^{\sigma}, \quad L = G^{\tau}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} H &= \left\{ \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix} \mid h_1 \in U(p, \mathbb{F}), h_2 \in U(q, \mathbb{F}) \right\}, \\ L &= \left\{ \begin{pmatrix} \ell_1 & 0 \\ 0 & \ell_2 \end{pmatrix} \mid \ell_1 \in U(r, \mathbb{F}), \ell_2 \in U(s, \mathbb{F}) \right\} \end{aligned}$$

となる。このとき、 $\mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\tau}$  の極大可換部分空間  $\alpha$  を次のように取る。

$$\alpha = \left\{ Y(\theta_1, \dots, \theta_s) = \begin{pmatrix} 0 & & d(\theta_1, \dots, \theta_s) \\ & 0 & \\ -d(\theta_1, \dots, \theta_s) & & 0 \end{pmatrix} \mid \theta_1, \dots, \theta_s \in \mathbb{R} \right\}$$

ただし

$$d(\theta_1, \dots, \theta_s) = \begin{pmatrix} \theta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \theta_s \end{pmatrix}.$$

$e_j \in i\alpha^*$  を

$$e_j : Y(\theta_1, \dots, \theta_s) \mapsto i\theta_j$$

で定義すると、 $\Sigma = \Sigma(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \alpha)$  は次の  $\Sigma_{max}$  ( $BC_s$ -型) に含まれる。

$$\Sigma_{max} = \{\pm e_j \pm e_k \mid 1 \leq j < k \leq s\} \cup \{\pm e_j \mid 1 \leq j \leq s\} \cup \{\pm 2e_j \mid 1 \leq j \leq s\}$$

$G^{\sigma\tau} \cong U(p+s, \mathbb{F}) \times U(q-s, \mathbb{F})$  であるから、 $\dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha, \lambda)$  は容易に計算できて、次の表で与えられる。

$\lambda \backslash \alpha$	$\pm e_j \pm e_k$	$\pm e_j$	$\pm 2e_j$
1	$c$	$c(p-s)$	$c-1$
-1	0	$c(q-s)$	0

ただし、

$$c = \begin{cases} 1 & (\mathbb{F} = \mathbb{R}) \\ 2 & (\mathbb{F} = \mathbb{C}) \\ 4 & (\mathbb{F} = \mathbb{H}) \end{cases}$$

また、 $W_H(A) = W_{H \cap L}(A)$  であるので、命題 1 により  $J \cong W_H(A) \ltimes J_0$  となり、この場合

$$J_0 = Z_H(A)Z_L(A) \cap A = \{a \in A \mid a^2 = e\}$$

となる。

同様にして、 $\mathfrak{g}_s$  が古典型単純リー環の場合に、すべての  $(\mathfrak{g}_s, \sigma, \tau)$  を分類し、それぞれについて 1 つの標準的な  $(G, H, L)$  を選んで、 $\Sigma_{\max}, W, \dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha, \lambda), J$  を求めると、次の表ようになる。 $(\sigma = \tau$  の場合は省略した。 $\Sigma, \dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha, \lambda)$  は  $(\mathfrak{g}_s, \sigma, \tau)$  によって決まるが、 $W, J$  は  $G$  の取り方と  $H, L$  の連結成分の取り方によって、多少変化し得る。このような細かい変化も重要なはずだが、後の研究にゆだねたい。)

type	$\mathbb{F}$	$\begin{pmatrix} G \\ H \\ L \end{pmatrix}$	$\Sigma_{\max}, W$	$\dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}, \alpha, \lambda)$	$N$
BDI - I AIII - III CII - II	$\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{H}$	$\begin{pmatrix} U(n, \mathbb{F}) \\ U(p, \mathbb{F}) \times U(q, \mathbb{F}) \\ U(r, \mathbb{F}) \times U(s, \mathbb{F}) \end{pmatrix}$	$BC_s$	$\begin{pmatrix} c & c(p-s) & c-1 \\ 0 & c(q-s) & 0 \end{pmatrix}$	2
AI - III CI - II	$\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$	$\begin{pmatrix} U(n, \mathbb{F}') \\ U(n, \mathbb{F}) \\ U(r, \mathbb{F}') \times U(s, \mathbb{F}') \end{pmatrix}$	$BC_s$	$\begin{pmatrix} c & c(r-s) & c-1 \\ c & c(r-s) & c \end{pmatrix}$	4
DI - III AIII - II	$\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$	$\begin{pmatrix} U(2m, \mathbb{F}) \\ U(r, \mathbb{F}) \times U(s, \mathbb{F}) \\ U(m, \mathbb{F}') \end{pmatrix}$	$BC_{s'} (s' = \begin{bmatrix} s \\ 2 \end{bmatrix})$	$\begin{pmatrix} 2c & c(r-s) & 2c-1 \\ 2c & c(r-s) & c-1 \\ 0 & 2c\varepsilon & 0 \end{pmatrix}$	4
AI - II		$\begin{pmatrix} U(2m) \\ O(2m) \\ Sp(m) \end{pmatrix}$	$A_{m-1}$	$\begin{pmatrix} 2 & - & - \\ 2 & - & - \end{pmatrix}$	4



DIII - III'	$\begin{pmatrix} SO(4m) \\ U(2m) \\ I'U(2m)I' \\ (I' = I_{4m-1,1}) \end{pmatrix}$	$BC_{m-1}$	$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$	2
DI - I' $\begin{pmatrix} p, r = \\ 5 \text{ or } 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \pi(SO(8)) \\ \pi(SO(p) \times SO(q)) \\ \kappa\pi(SO(r) \times SO(s)) \end{pmatrix}$	$p = r = 5$ のとき $G_2$ (その他は) $A = \{e\}$	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <span>short</span> <span>long</span> </div> $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \pm\omega & 1 & 0 \end{pmatrix}$	2

ここで、

$$\mathbb{F}' = \begin{cases} \mathbb{C} & (\mathbb{F} = \mathbb{R}) \\ \mathbb{H} & (\mathbb{F} = \mathbb{C}) \end{cases} \quad c = \begin{cases} 1 & (\mathbb{F} = \mathbb{R}) \\ 2 & (\mathbb{F} = \mathbb{C}) \\ 4 & (\mathbb{F} = \mathbb{H}) \end{cases}$$

$$p+q = r+s = n (= 2m), \quad r \geq p \geq q \geq s, \quad \varepsilon = s - 2s' = \begin{cases} 0 & (s : \text{even}) \\ 1 & (s : \text{odd}) \end{cases}, \quad \omega^3 = 1,$$

$\pi: SO(8) \rightarrow SO(8)/\{\pm I\} \cong \text{Ad}(SO(8))$ ,  $\kappa$  は  $\pi(SO(8))$  の位数 3 の外部自己同型。

DI-I' 型以外の  $\dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha, \lambda)$  の配列は、

$$\begin{array}{c|ccc} & \alpha & & \\ \lambda & & \pm e_j \pm e_k & \pm e_j & \pm 2e_j \\ \hline 1 & & & & \\ -1 & & & & \\ (\pm i) & & & & \end{array} \left( \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right)$$

また、 $J = W \bowtie J_0$ ,

$$J_0 = \{a \in A \mid a^N = e\}$$

である。

$\sigma\tau_x$  の固有値  $x \in G$ ,  $\tau_x = \text{Ad}(x)\tau\text{Ad}(x)^{-1}$  とするとき、 $\sigma\tau_x$  の固有値を調べる。  
 $(G, H, L)$  が定理 1 の仮定を満たすとすると

$$x = hal \quad (h \in H, a \in A, \ell \in L)$$

と表せる。このとき、

$$\begin{aligned} \sigma\tau_x &= \sigma \text{Ad}(hal)\tau \text{Ad}(hal)^{-1} \\ &= \text{Ad}(h)\sigma \text{Ad}(a)\tau \text{Ad}(a)^{-1} \text{Ad}(h)^{-1} \\ &= \text{Ad}(h)\sigma\tau \text{Ad}(a)^{-2} \text{Ad}(h)^{-1} \end{aligned}$$

よって、 $\sigma\tau \text{Ad}(a)^{-2}$  の固有値を調べればよい。 $0 \neq X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha, \lambda)$  のとき、

$$\sigma\tau \text{Ad}(a)^{-2}X = \sigma\tau a^{-2\alpha}X = \lambda a^{-2\alpha}X$$

(ただし、 $A \ni a \mapsto a^\alpha \in U(1)$  は  $\alpha: \mathfrak{a} \rightarrow i\mathbb{R}$  から決まる準同型) であるから、 $\lambda a^{-2\alpha}$  は  $\sigma\tau_x$  の 1 つの固有値である。

注意(例 1 の再考)  $(G, H, L) = (O(2m), O(r) \times O(s), U(m))$  or  $(U(2m), U(r) \times U(s), Sp(m))$  について、 $s: \text{odd}$ ,  $s < m$  とする。表の DI-III, AIII-II 型のところを見ると、 $\alpha = \pm e_j$  のとき、

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha, \lambda) \neq \{0\} \iff \lambda = \pm 1, \pm i$$

よって、

$$\{\sigma\tau_x \text{ の固有値} \} \supset \{\pm a^{-2\alpha}, \pm ia^{-2\alpha}\} \not\subset \{\pm 1\}$$

$$\therefore (\sigma\tau_x)^2 \neq \text{id.} \quad \sigma\tau_x \neq \tau_x\sigma$$

regular elements  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha, \lambda) \neq \{0\}$  を満たす任意の  $\alpha \neq 0$ ,  $\lambda$  に対して、

$$\lambda a^{-2\alpha} \neq 1$$

のとき、 $x = hal$  は regular であると言おう。明らかに次が成り立つ。

命題 3  $x$  が regular  $\iff \mathfrak{g}^{\sigma\tau_x} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, 0) \iff \mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\tau_x} = \mathfrak{a} \iff \mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\tau_x}$  が可換

例 5  $G = G_1 \times \cdots \times G_1$  ( $2n$  個) とし、 $\sigma, \tau$  を次で定義する。

$$\sigma(g_1, g_2, g_3, g_4, \dots, g_{2n-1}, g_{2n}) = (g_2, g_1, g_4, g_3, \dots, g_{2n}, g_{2n-1})$$

$$\tau(g_1, g_2, g_3, \dots, g_{2n-2}, g_{2n-1}, g_{2n}) = (g_{2n}, g_3, g_2, \dots, g_{2n-1}, g_{2n-2}, g_1)$$

このとき  $\sigma\tau$  の位数は  $n$  である。 $H = G^\sigma$ ,  $L = G^\tau$  とおく。このとき、写像

$$H(g_1, \dots, g_{2n})L \mapsto \{gg_1^{-1}g_2 \cdots g_{2n-1}^{-1}g_{2n}g^{-1} \mid g \in G_1\}$$

により

$$H \backslash G / L \cong \{\text{conjugacy classes in } G_1\} \quad (2.4)$$

である。

(2.4) の証明

$$\begin{aligned} H(g_1, \dots, g_{2n})L &= H(g_1^{-1}, g_1^{-1}, e, \dots, e)(g_1, \dots, g_{2n})L \\ &= H(e, g_1^{-1}g_2, g_3, \dots, g_{2n})L \\ &= H(e, g_1^{-1}g_2, g_3, \dots, g_{2n})(e, g_2^{-1}g_1, g_2^{-1}g_1, e, \dots, e)L \\ &= H(e, e, g_3g_2^{-1}g_1, g_4, \dots, g_{2n})L \\ &= H(e, e, e, g_1^{-1}g_2g_3^{-1}g_4, g_5, \dots, g_{2n})L \\ &= \dots \\ &= H(e, \dots, e, g_1^{-1}g_2 \cdots g_{2n-1}^{-1}g_{2n})L. \end{aligned}$$

$g, g' \in G_1$  に対し、

$$(e, \dots, e, g') = h(e, \dots, e, g)\ell^{-1}$$

$$\text{for some } h = (h_1, \dots, h_{2n}) \in H, \ell = (\ell_1, \dots, \ell_{2n}) \in L$$

とすると、

$$\ell_{2n} = \ell_1 = h_1 = h_2 = \ell_2 = \ell_3 = \dots = \ell_{2n-2} = \ell_{2n-1} = h_{2n-1} = h_{2n}$$

$$\therefore g' = h_{2n}g\ell_{2n}^{-1} = h_{2n}gh_{2n}^{-1}$$

逆に、 $g' = x_1gx_1^{-1}$  ( $x_1 \in G_1$ ) のとき、 $x = (x_1, \dots, x_1) \in H \cap L$  とおくと

$$(e, \dots, e, g') = x(e, \dots, e, g)x^{-1} \quad \square$$

$$\mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\tau} = \{(-X, X, \dots, -X, X) \in \mathfrak{g} \mid X \in \mathfrak{g}_1\}$$

であるから、 $\mathfrak{a}_1$  を  $\mathfrak{g}_1$  の 1 つの極大可換部分環とすると、

$$\mathfrak{a} = \{(-X, X, \dots, -X, X) \in \mathfrak{g} \mid X \in \mathfrak{a}_1\}$$

は  $\mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\tau}$  の極大可換部分空間である。

任意の  $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a})$  は、

$$\alpha(-X, X, \dots, -X, X) = \alpha_1(X) \quad \text{for } X \in \mathfrak{a}_1$$

によって  $\alpha_1 \in \Sigma(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{a}_1)$  と同一視でき、

$$\dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha) = 2n$$

である。さらに、任意の 1 の  $n$ -乗根  $\lambda$  に対し、

$$\dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha, \lambda) = 2$$

である。

容易に

$$W_H(\mathfrak{a}) = W_L(\mathfrak{a}) = W_{H \cap L}(\mathfrak{a}) = \{(w, \dots, w) \mid w \in W_1\} \cong W_1$$

( $W_1 = N_{G_1}(A_1)/Z_{G_1}(A_1)$ ) であるから、 $J \cong W_1 \ltimes J_0$  であり、

$$Z_H(\mathfrak{a}) = \{(a_1, \dots, a_{2n}) \in A_1 \times \dots \times A_1 \mid a_{2j-1} = a_{2j} \text{ for } j = 1, \dots, n\},$$

$$Z_L(\mathfrak{a}) = \{(a_1, \dots, a_{2n}) \in A_1 \times \dots \times A_1 \mid a_{2j} = a_{2j+1} \text{ for } j = 1, \dots, n-1 \text{ and } a_{2n} = a_1\},$$

$$Z_H(\mathfrak{a})Z_L(\mathfrak{a}) = \{(a_1, \dots, a_{2n}) \in A_1 \times \cdots \times A_1 \mid a_1^{-1}a_2a_3^{-1}a_4 \cdots a_{2n-1}^{-1}a_{2n} = e\}$$

であるから

$$J_0 = Z_H(\mathfrak{a})Z_L(\mathfrak{a}) \cap A = \{(a^{-1}, a, \dots, a^{-1}, a) \in A \mid a^{2n} = e\}$$

である。

$G_1$  が連結のとき、次の4つの全単射からなる可換図式がかける。

$$\begin{array}{ccc} J \backslash A & \xrightarrow{\sim} & W_1 \backslash A_1 \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ H \backslash G/L & \xrightarrow{\sim} & G_1/\text{conj.} \end{array}$$

ここで、縦の写像は inclusion map で与えられ、横の写像は (2.4) により

$$(g_1, \dots, g_{2n}) \mapsto g_1^{-1}g_2 \cdots g_{2n-1}^{-1}g_{2n}$$

特に  $J \backslash A \longrightarrow W_1 \backslash A_1$  は

$$(a^{-1}, a, \dots, a^{-1}, a) \mapsto a^{2n}.$$

によって与えられる。

### 3 Noncompact case

簡単のため、 $G$  は連結、半単純とする。

#### 基本的考え方

$$G/L \ni gL \mapsto f_g = \sigma \tau_g = \sigma \text{Ad}(g) \tau \text{Ad}(g)^{-1} \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$$

により、 $HgL$  に対し、 $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  の中の  $\text{Ad}(H)$ -共役類

$$\{\text{Ad}(h)f_g\text{Ad}(h)^{-1}\}$$

が対応する。

#### Jordan 分解

$$f_g = su = us$$

を  $f_g \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$  の乗法的 Jordan 分解とすると、 $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  は代数群だから、

$$s, u \in \text{Aut}(\mathfrak{g}), \quad u = \exp \text{ad}(-2X_u) \quad \text{for some nilpotent element } X_u \in \mathfrak{g}$$

が成り立つ。

命題 4 (i)  $\sigma X_u = \tau_g X_u = -X_u$

(ii)  $g_s = (\exp X_u)^{-1} g$  とおくと、 $f_{g_s} = s$

証明 (i)  $\sigma(su)\sigma = \sigma(\sigma\tau_g)\sigma = \tau_g\sigma = (\sigma\tau_g)^{-1} = (us)^{-1} = s^{-1}u^{-1}$

$$\therefore \sigma s \sigma = s^{-1}, \quad \sigma u \sigma = u^{-1}, \quad \sigma X_u = -X_u$$

同様にして、 $\tau_g X_u = -X_u$

(ii)  $f_{g_s} = \sigma \operatorname{Ad}(g_s) \tau \operatorname{Ad}(g_s)^{-1} = \sigma \operatorname{Ad}(\exp X_u)^{-1} \tau_g \operatorname{Ad}(\exp X_u) = \sigma \tau_g \operatorname{Ad}(\exp 2X_u) = suu^{-1} = s$   $\square$

命題 4 を用いて、容易に次の定理が得られる。

定理 3 (i) 任意の  $g \in G$  は

$$g = (\exp X_u) g_s$$

(ただし、 $f_{g_s}$  は semisimple,  $X_u$  は  $\mathfrak{g}$  の巾零元で  $\sigma X_u = \tau_{g_s} X_u = -X_u$  を満たす。) と一意的に表せる。

(ii)  $g = (\exp X_u) g_s$ ,  $g' = (\exp X'_u) g'_s$  を  $g, g' \in G$  の (i) における分解とする。

(a)  $h \in H, \ell \in L$  に対し、

$$g' = h g \ell \iff g'_s = h g_s \ell \quad \text{and} \quad X'_u = \operatorname{Ad}(h) X_u$$

(b)  $g_s = g'_s$  のとき、

$$g' \in H g L \iff X'_u \in \operatorname{Ad}(H \cap g_s L g_s^{-1}) X_u$$

注意 (ii) の (b) における  $\operatorname{Ad}(H \cap g_s L g_s^{-1}) X_u$  は対称対  $(\mathfrak{g}^{\sigma\tau_{g_s}}, \mathfrak{g}^{\sigma} \cap \mathfrak{g}^{\tau_{g_s}})$  の巾零共役類である (c.f. [6],[10],[12] etc.)。

命題 5  $H g L$  is closed in  $G \iff g = g_s$

例 6 ([8])  $G = GL(n, \mathbb{F})$  ( $\mathbb{F}$  は標数  $\neq 2$  の体) とする。  $\sigma g = I_{p,q} g I_{p,q}$ ,  $\tau g = I_{r,s} g I_{r,s}$ ,  $H = G^{\sigma}$ ,  $L = G^{\tau}$  ( $n = p + q = r + s$ ) とすると、

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix} \mid h_1 \in GL(p, \mathbb{F}), h_2 \in GL(q, \mathbb{F}) \right\}$$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \ell_1 & 0 \\ 0 & \ell_2 \end{pmatrix} \mid \ell_1 \in GL(r, \mathbb{F}), \ell_2 \in GL(s, \mathbb{F}) \right\}$$

このとき、 $g \in G$ ,  $X \in \mathfrak{g}$  に対し、

$$f_g X = \sigma \operatorname{Ad}(g) \tau \operatorname{Ad}(g)^{-1} X = \operatorname{Ad}(I_{p,q} g I_{r,s} g^{-1}) X$$

よって、 $\tilde{f}_g = I_{p,q} g I_{r,s} g^{-1}$  とおけば、

$$f_g = \operatorname{Ad}(\tilde{f}_g)$$

である。従って、 $f_g \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$  の Jordan 分解のかわりに  $\tilde{f}_g \in GL(n, \mathbb{F})$  の Jordan 分解を考えればよい。

簡単な場合を考えてみよう。 $p = q = r = s = 1$  とし、

$$g_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると、

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{g_s} &= I_{p,q} g_s I_{r,s} g_s^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= -I_2 \end{aligned}$$

であり、 $\tau_{g_s} = \tau = \sigma$  であるから

$$X_u \in \mathfrak{g}^{-\sigma} = \mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\tau_{g_s}}$$

となり、

$$g = (\exp X_u) g_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

は定理 3 (i) の条件を満たす。この場合、 $g$  は群  $G$  の元としては semisimple であり、 $\exp X_u$  と  $g_s$  は可換でない。 $(\tilde{f}_g \in G$  の Jordan 分解は  $\tilde{f}_g = \tilde{f}_{g_s} \exp(-2X_u) = \exp(-2X_u) \tilde{f}_{g_s}$  であるから、 $\exp X_u$  は  $\tilde{f}_{g_s}$  と可換である。)

極分解  $f_g = \sigma \tau_g \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$  は semisimple とする。 $f_g$  による  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  の固有空間分解

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}^{\times}} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\lambda}, \quad \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\lambda} = \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid f_g X = \lambda X\}$$

を用いて、線形写像  $k, p: \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  を次で定義する。

$$\begin{aligned} kX &= \frac{\lambda}{|\lambda|} X \quad \text{for } X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\lambda} \\ pX &= (\log |\lambda|) X \quad \text{for } X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\lambda} \end{aligned}$$

容易に、次のことがわかる。

$$f_g = k \exp p = (\exp p)k, \quad k \in \text{Aut}(\mathfrak{g}), \quad p \in \text{Der}(\mathfrak{g}),$$

$$p = \text{ad}(-2X_p) \quad \text{for some } X_p \in \mathfrak{g}$$

命題 6 (i)  $\sigma X_p = \tau_g X_p = -X_p$

(ii)  $g_k = (\exp X_p)^{-1}g$  とおくと、 $f_{g_k} = k$

(証明は命題 4 と同じ。)

命題 7 次の 3 条件を満たす  $\mathfrak{g}$  の Cartan involution  $\theta$  が存在する。

$$\sigma\theta = \theta\sigma, \quad k\theta = \theta k, \quad \theta X_p = -X_p$$

以下、次の条件を満たす Cartan involution  $\theta$  が存在するとし、それを 1 つ固定する。

$$\sigma\theta = \theta\sigma, \quad \tau\theta = \theta\tau$$

(一般に  $\tau$  をその共役に取り替える必要がある。)  $K = G^\theta$ ,  $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}^\theta$ ,  $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}^{-\theta}$ ,  $G_{ss} = \{g \in G \mid f_g \text{ is semisimple}\}$  とおく。

命題 7 を用いて、容易に次の基本的な定理が証明できる。

定理 4 (i)  $G_{ss}$  に含まれる任意の  $H$ - $L$  double coset は次の形の代表元を含む。

$$g = (\exp X_p)g_k$$

ただし、 $g_k \in K$ ,  $\sigma X_p = \tau_{g_k} X_p = \theta X_p = -X_p$

(ii)  $g = (\exp X_p)g_k$ ,  $g' = (\exp X'_p)g'_k$  を (i) の形の 2 つの元とする。

(a)  $g' \in HgL \iff g'_k = hg_k\ell$ ,  $X'_p = \text{Ad}(h)X_p$  for some  $h \in K \cap H$ ,  $\ell \in K \cap L$

(b)  $g_k = g'_k$  のとき、

$$g' \in HgL \iff X'_p \in \text{Ad}(K \cap H \cap g_k L g_k^{-1})X_p$$

fundamental Cartan subset (群の場合の fundamental Cartan subgroup の一般化)  $\mathfrak{t}$  を  $\mathfrak{k}^{-\sigma} \cap \mathfrak{k}^{-\tau}$  の 1 つの極大可換部分空間とし、 $T = \exp \mathfrak{t}$  とおく。 $\mathfrak{c} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$  ( $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ ) を  $\mathfrak{t}$  を含む  $\mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\tau}$  の 1 つの極大可換部分空間とし、 $C = (\exp \mathfrak{a})T$  (a fundamental Cartan subset) とおく。

直交系 次のような“直交系”  $Q$  を考える。

$$Q = \{X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_k}\} \subset \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$$

ただし、各  $j = 1, \dots, k$  に対し、 $\alpha_j \in \mathfrak{c}^* - \{0\}$ ,  $\alpha_j(\mathfrak{a}) = \{0\}$ ,  $0 \neq X_{\alpha_j} \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{c}, \alpha_j)$ ,  $\sigma \tau X_{\alpha_j} = \lambda_j X_{\alpha_j}$  for some  $\lambda_j \in U(1)$ ,  $\sigma X_{\alpha_j} = -\overline{X_{\alpha_j}}$ ,

$$[X_{\alpha_j}, X_{\alpha_\ell}] = [X_{\alpha_j}, \sigma X_{\alpha_\ell}] = 0 \quad \text{for } j \neq \ell$$

standard Cartan subsets このような直交系  $Q$  に対し、

$$\mathfrak{a}_Q = \mathfrak{a} \oplus \mathbb{R}(X_{\alpha_1} - \sigma X_{\alpha_1}) \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}(X_{\alpha_k} - \sigma X_{\alpha_k})$$

$$T_Q = \{t \in T \mid t^{2\alpha_j} = \lambda_j \text{ for } j = 1, \dots, k\}$$

$$C_Q = (\exp \mathfrak{a})T_Q$$

とおき、 $C_Q$  の各連結成分を standard Cartan subset と呼ぼう。

注意 fundamental Cartan subset  $C$  は可換だが、一般に standard Cartan subset  $C'$  は  $G$  の部分集合としては可換でない。 $(\{f_g \mid g \in C'\})$  は  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  の可換部分集合である。

$$J_K = N_T^K / Z_T^K$$

を § 2 で定義した

$$J_K \backslash T \cong K \cap H \backslash K / K \cap L$$

となる群とする。2 つの standard Cartan subset  $C_1, C_2$  が  $J_K$ -共役とは、

$$C_2 \cap T = h(C_1 \cap T)\ell^{-1} \quad \text{for some } (h, \ell) \in N_T^K$$

であることとする。 $\{C_i \mid i \in I\}$  を standard Cartan subsets の  $J_K$ -共役類の 1 つの完全代表系とする。

$$N_{C_i}^K = \{(h, \ell) \in (K \cap H) \times (K \cap L) \mid hC_i\ell^{-1} = C_i\}$$

$$Z_{C_i}^K = \{(h, \ell) \in (K \cap H) \times (K \cap L) \mid h g \ell^{-1} = g \text{ for all } g \in C_i\}$$

$$J_{C_i} = N_{C_i}^K / Z_{C_i}^K$$

とおき、 $G_{rs} = \{g \in G_{ss} \mid \mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\tau_g} \text{ が可換} \}$  とおく。

定理 5 (i)  $G_{ss} = \bigcup_{i \in I} H C_i L$

(ii)  $G_{rs} = \bigsqcup_{i \in I} H(C_i \cap G_{rs})L$

(iii)  $H \backslash G_{rs} / L \cong \bigsqcup_{i \in I} J_{C_i} \backslash (C_i \cap G_{rs})$

(iv)  $H \backslash H C L / L \cong J_C \backslash C$  ( $C$  は fundamental Cartan subset)

系  $G$  が complex で、 $\sigma, \tau$  が正則のとき、

(i)  $G_{ss} = H C L$

(ii)  $H \backslash G_{ss} / L \cong J_C \backslash C$

(この場合、 $J_C \cong J_K$  である。なぜならば、 $(h, \ell) \in N_T^K$  のとき、 $C = (\exp i t)T$  だから  $h C \ell^{-1} = (\exp i \text{Ad}(h)t)h T \ell^{-1} = (\exp i t)T = C$ 。)



## References

- [1] S. Aoki and S. Kato.  $U(n, n)/GL(n, \mathbb{C})$  上の不変固有超関数の接続公式について. In 数理解析研究所講究録 855, pages 78–100, 1993.
- [2] S. Gindikin. On Stein extensions of real symmetric spaces. *Math. Ann.*, 286:1–12, 1990.
- [3] B. Hoogenboom. *Intertwining functions on compact Lie groups*. PhD thesis, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1983.
- [4] T. Kakehi and C. Tsukamoto. Characterization of images of Radon transforms. *Advanced Studies in Pure Math.*, 22:101–116, 1993.
- [5] T. Kobayashi. 簡約型等質多様体上の調和解析とユニタリ表現論. In 数学 46 巻 2 号, pages 124–143, 1994.
- [6] B. Kostant and S. Rallis. Orbits and representations associated with symmetric spaces. *Amer. J. Math.*, 93:753–809, 1971.
- [7] T. Matsuki. 代数群の 2 つの involution に関する両側剰余類分解. In 数理解析研究所講究録 855, pages 64–77, 1993.
- [8] T. Matsuki. Double coset decompositions of algebraic groups arising from two involutions I. to appear in *Journal of Algebra*.
- [9] T. Matsuki. Double coset decompositions of algebraic groups arising from two involutions II. in preparation.
- [10] T. Ohta. Classification of admissible nilpotent orbits in the classical real Lie algebras. *Journal of algebra*, 136:290–333, 1991.
- [11] S. Sano. Distributions sphériques invariantes sur les espaces symétriques semi-simples  $G_{\mathbb{C}}/G$ . *J. Math. Kyoto University*, 31:377–417, 1991.
- [12] J. Sekiguchi. Remarks on real nilpotent orbits of a symmetric pair. *J. Math. Soc. Japan*, 39:127–138, 1987.